

Reg. No. :

Code No. : 20579 B Sub. Code : SMMA 62

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Sixth Semester

Mathematics — Core

NUMBER THEORY

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n$ _____ என்ற தொடரின் மதிப்பு.

(அ) $\frac{n(n+1)}{2}$

(ஆ) $\frac{n(n+1)}{3}$

(இ) $n(n+1)$

(ஈ) $\frac{n(n+1)}{6}$

The value of $1 + 2 + 3 + \dots + n$ is _____.

(a) $\frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\frac{n(n+1)}{3}$

(c) $n(n+1)$

(d) $\frac{n(n+1)}{6}$

2. பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் n வது நிறையில் $(k+1)$ -வது எண் யாது?

(அ) $\binom{n}{k}$ (ஆ) $\binom{n}{k+1}$

(இ) $\binom{n}{k-1}$ (ஈ) $\binom{n}{k+2}$

In the Pascal's triangle, the $(k+1)^{th}$ number in the n^{th} row is

(a) $\binom{n}{k}$ (b) $\binom{n}{k+1}$

(c) $\binom{n}{k-1}$ (d) $\binom{n}{k+2}$

3. மீ.பொ.வ. (119, 272)ன் மதிப்பு

(அ) 27 (ஆ) 9

(இ) 17 (ஈ) 57

The gcd (119, 272) is

(a) 27 (b) 9

(c) 17 (d) 57

4. k பூச்சியமல்லாத முழு எண் எனில் மீ.பொ.வ. (ka, kb) $= ?$

(அ) k மீ.பொ.வ. (a, b) (ஆ) $|k|$ மீ.பொ.வ. (a, b)

(இ) மீ.பொ.வ. (a, b) (ஈ) k^2 மீ.பொ.வ. (a, b)

For any integer $k \neq 0$, $\gcd(ka, kb) = ?$

(a) $k \gcd(a, b)$ (b) $|k| \gcd(a, b)$

(c) $\gcd(a, b)$ (d) $k^2 \gcd(a, b)$

5. வகுத்தல் செய்வழிப்படி, ஒவ்வொரு இரட்டைப்படை மிகை எண்ணையும் தனிச்சிறப்புப்பட எழுத முடியும்

(அ) $4n + 1$

(ஆ) $4n + 3$

(இ) $4n$ (or) $4n + 2$

(ஈ) இவையேதும் இல்லை

According to division algorithm, every positive even integer can be uniquely written as

(a) $4n + 1$ (b) $4n + 3$

(c) $4n$ (or) $4n + 2$ (d) none of these

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றுள் விகிதமுறா எண்கள் எது?

(அ) $3^{\frac{1}{2}}$

(ஆ) $11^{\frac{1}{2}}$

(இ) $4^{\frac{1}{4}}$

(ஈ) மேற்குறிப்பிட்ட அனைத்தும்

Which of the following is irrational?

(a) $3^{\frac{1}{2}}$

(b) $11^{\frac{1}{2}}$

(c) $4^{\frac{1}{4}}$

(d) All the above

7. 5^{48} ஐ 7ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி

(அ) 1

(ஆ) 2

(இ) 4

(ஈ) 9

If 5^{48} is divided by 12, then the remainder is

(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 9

8. $5x \equiv 2 \pmod{26}$ என்ற ஒருபடி ஒருங்கிசைவு சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு

(அ) 10

(ஆ) 12

(இ) 14

(ஈ) 16

A solution of the linear congruence $5x \equiv 2 \pmod{26}$ is

- (a) 10 (b) 12
(c) 14 (d) 16

9. $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$ என்ற ஒருங்கிசைவு
சமன்பாட்டை உறுதி செய்யும் மிகச் சிறிய ஒற்றைப்படை
பகா எண்

- (அ) 5 (ஆ) 7
(இ) 11 (ஈ) 13

The least odd prime for which the congruence
 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$ holds good is

- (a) 5 (b) 7
(c) 11 (d) 13

10. ஜீரோ (புனை) பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

- (அ) 0
(ஆ) 1
(இ) ஒன்றுக்கு மேற்பட்டது ஆனால்
எண்ணிலடங்கியது
(ஈ) எண்ணிலடங்காதது

The number of pseudo primes is

- (a) 0
- (b) 1
- (c) more than 1 but finite
- (d) infinite

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) நிரூபிக்க : $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$
 $\forall n \geq 1.$

Prove that $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$
 $\forall n \geq 1.$

Or

(ஆ) முக்கோண எண்ணை வரையறுக்க. எடுத்துக்காட்டு
கொடு முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் என்பது
முக்கோண இயல் எண் ஆகும் என நிரூபி.

Define a triangular number. Give an
example prove that the sum of the first n
natural numbers is triangular.

12. (அ) யூக்லிடின் முற்கோளை கூறி நிரூபி.

State and prove the Euclid's Lemma.

Or

- (ஆ) மீ.பொ.வ. $(a, b) = 1$, எனில் மீ.பொ.வ. $(a + b), a^2 - ab + b^2$ ன் மதிப்பு 1 அல்லது 3 என நிரூபி.

If $\gcd(a, b) = 1$ prove that $\gcd(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ or 3.

13. (அ) $n > 1$ எனில் $n^2 + 4$ ஒரு பகா எண் எனக் காட்டுக.

If $n > 1$, show that $n^2 + 4$ is composite.

Or

- (ஆ) 1949 மற்றும் 1951 ஆகியன இரட்டைப் பகா எண்கள் என்பதைச் சரிபார்க்க.

Verify that the integers 1949 and 1951 are twin primes.

14. (அ) a மற்றும் b என்ற தன்னிச்சையான முழு எண்களுக்கு $a \equiv b \pmod{n}$ ஆக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு a மற்றும் b ஆகியன n ல் வகுக்கப்படும் பொழுது ஒரு மாதிரியான எதிர்மறையற்ற எச்சத்தை விட்டுச் செல்லும் என நிரூபி.

Prove that for arbitrary integers a and b ,
 $a \equiv b \pmod{n}$ if and only if a and b leave the
same non-negative remainder when divided
by n .

Or

(ஆ) 9^{9^9} என்ற எண்ணின் கடைசி இரண்டு
இலக்கங்களைக் காண்க.

Find the last two digits of the number. 9^{9^9}

15. (அ) பெர்மாட்சின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Fermat's Theorem.

Or

(ஆ) P ஒரு பகா எண் எனில், எந்தவொரு முழு எண்
 a க்கும் $P \mid a^p + (p-1)!$ மற்றும்
 $P \mid (p-1)!a^p + a$ என நிரூபி.

If P is a prime, prove that for any integer
 a , $P \mid a^p + (p-1)!$ and $P \mid (p-1)!a^p + a$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) ஈறுருப்பு தேற்றத்தை நிர்மாணிக்கவும்.

Establish the binomial theorem.

Or

- (ஆ) (i) ஆர்க்கிமீடியன் பண்பினை எழுதி நிரூபிக்க.
(ii) தொகுத்தறி முறை (முடிவுறு) யின் முதல் கொள்கையை எழுதி நிரூபிக்க.
(i) State and prove Archimedean Property.
(ii) State and prove the first principle of finite induction.

17. (அ) வகுத்தல் செய்வழியை கூறி நிரூபி.

State and prove the Division Algorithm.

Or

- (ஆ) $180x + 75y = 9000$ என்ற நேரியடையோ பாண்டைன் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

Solve the linear Diophantine equation $180x + 75y = 9000$.

18. (அ) (i) எண்ணியலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(ii) நிரூபிக்க $48 \mid m(m^2 + 20)$.

(i) State and prove the fundamental theorem of Arithmetic.

(ii) Prove that $48 \mid m(m^2 + 20)$.

Or

(ஆ) கோல்டுபாக் அனுமானத்தை விரிவாக விளக்கவும்.

Discuss about the Goldbach conjecture.

19. (அ) (i) $ca \equiv cb \pmod{n}$ $d = \text{மீ.பொ.வ. (c.n.)}$

எனில் $a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}$ என நிரூபி.

(ii) $1! + 2! + 3! + \dots + 99! + 100!$ ஐ 12

வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி யாது?

(i) If, $ca \equiv cb \pmod{n}$ prove that

$a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}$ when $d = \text{G.C.D. (c.n.)}$.

(ii) What is the remainder when the sum $1! + 2! + 3! + \dots + 99! + 100!$ is divided by 12.

Or

(ஆ) $(a, m) | b$ எனில், $ax \equiv b \pmod{m}$ என்பது சரியாக (a, m) தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது என நிரூபி.

If $(a, m) | b$ prove that $ax \equiv b \pmod{m}$ has exactly (a, m) solutions.

20. (அ) P ஒரு பகா எண் எனில் $a^P \equiv a \pmod{P}$ என நிரூபி. இதில் a என்பது ஒரு முழு எண்.

If P is a prime, then $a^P \equiv a \pmod{P}$ for any integer a .

Or

(ஆ) n என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை போலி பகா எண் எனில், $Mn = 2^n - 1$ என்பது மிகப்பெரிய ஒன்று என நிரூபி.

If n is an odd pseudo prime, then prove that $Mn = 2^n - 1$ is larger one.
